数理解析研究所講究録
832巻 1993年 169-181



# 誤差を含む係数を持つ多項式の因数分解

日大生産工　平野菅保 ( Sugayasu Hirano )

$$f_{na}(x)=\sum_{i=0}^{na} a_i x^{na-i} \qquad a_i = a_{iT} + \Delta a_i,\quad a_0 = 1.0 \tag{1}$$

係数$a_i$を有限桁で与えられる$na$次多項式

$$f_{nb}(x)=\sum_{i=0}^{nb} b_i x^{nb-i} \qquad b_i = b_{iT} + \Delta b_i,\quad b_0 = 1.0 \tag{2}$$

$f_{na}(x)/f_{nb}(x)$で割り切れるように係数$b_i$を収束計算で求めて得られる$nb$次多項式

$$f_{nc}(x)=\sum_{i=0}^{nc} c_i x^{nc-i} \qquad c_i = c_{iT} + \Delta c_i,\quad c_0 = 1.0 \tag{3}$$

$f_{na}(x)/f_{nb}(x)$で商として得られる$nc$次多項式

( $a_{iT}, b_{iT}, c_{iT}$は$f_{naT}(x)=f_{nbT}(x)\cdot f_{ncT}(x)$を満足する多項式$f_{naT}(x)$, $f_{nbT}(x)$, $f_{ncT}(x)$それぞれの誤差を含まぬ係数であり、$\Delta a_i$, $\Delta b_i$, $\Delta c_i$は係数$a_i, b_i, c_i$がそれぞれ含む誤差である。$na = nb + nc$ )

$k$回目の反復計算による$f_{nb}(x)$，$f_{nc}(x)$ の近似式を

$$f_{nb}^{(k)}(x)=\sum_{i=0}^{nb} b_i^{(k)} x^{nb-i} \tag{2'}$$

$$f_{nc}^{(k)}(x)=\sum_{i=0}^{nc} c_i^{(k)} x^{nc-i} \tag{3'}$$

それぞれ$f_{nb}^{(k)}(x)$ (2′)，$f_{nc}^{(k)}(x)$ (3′) とする。

「$f_{nb}^{(k)}(x)=0$ と$f_{nc}^{(k)}(x)=0$ それぞれから得られる$nb$個，$nc$個の誤差を含む解$x_j$がすべて*$f_{na}(x)=0$を満足する解であるとき，$f_{na}(x)$ を$f_{nb}^{(k)}(x)$と$f_{nc}^{(k)}(x)$とに因数分解できたとする。」

*誤差を含む解$x_j$が$f_{na}(x)=0$ を満足するとは

$$\left| f_{na}(x_j) \right| \leq \max_{i=0,1,\cdots,na} \left( \left| \Delta a_i x_j^{na-i} \right| \right) \tag{4}$$

を満足することである。

$f_{na}(x)$ の有限桁で与えられる係数$a_i$の最下位の桁の次の桁から下位の多数の桁にそれぞれ任意の数字（0～9）を加え，多数桁による収束計算を行い，$f_{nb}(x)$ の係数$b_i$の上位の桁から順次下位の桁の数字を求めながら，次式(5)により$f_{nc}^{(k)}(x)$ の係数$c_i^{(k)}$を求める。

$$c_j^{(k)} = a_j - \sum_{i=i'}^{j-1} c_i^{(k)} b_{j-i}^{(k)} \qquad \begin{array}{l} i' = \max(0,\ j-nb) \\ j = 1, 2, \cdots, nc \end{array} \tag{5}$$

$$\left[\begin{array}{ll}\delta_j^{(k)}=a_j-\sum_{i=i'}^{nc}c_i^{(k)}b_{j-i}^{(k)} & \\ & j=nc+1,\ nc+2,\cdots,\ na \\ 0=a_{jT}-\sum_{i=i'}^{nc}c_{iT}\,b_{j-iT} & \end{array}\right]$$

適当な計算桁数をとり．$c_j^{(k)}$ (5) の計算によって $c_{nc}^{(k)}$ に入る丸め誤差を判別式 (6) の判別ができるようにする。

$$|\Delta a_{na}|\geqq|a_{na}-c_{nc}^{(k)}b_{nb}^{(k)}|=|\delta_{na}^{(k)}| \qquad (6)$$

① $f_{nb}^{(k')}(x)=0$ から得られる $nb$ 個の解がすべて条件式 (4) [ $f_{na}(x)=0$ ] を満足する場合

$nb$ 個の解の中のいずれかの解の絶対値が．$f_{nc}(x)=0$ が含む解の中のいずれかの解の絶対値よりも大きいときは．$f_{nb}^{(k')}(x)$ の係数 $b_i^{(k)}$ の計算桁数を増加させて．条件式 (6) を満足するように反復計算を行うと．$f_{nc}^{(k'+k)}(x)=0$ に含まれる解はすべて条件式 (4) [ $f_{na}(x)=0$ ] を満足する。ただし．次の条件を満足させる。

$nc+1<nb$ の場合

$$|\delta_j^{(k'+k)}|>|\delta_j^{(k'+k+1)}|>|\delta_j^{(k'+k+2)}|>\cdots\cdots$$

$$j=na,\ nc+1,\ nc+2,\ \cdots\cdots\cdots,\ 2nc$$

$nc+1\geqq nb$ の場合

$$|\delta_j^{(k'+k)}|>|\delta_j^{(k'+k+1)}|>|\delta_j^{(k'+k+2)}|>\cdots\cdots$$

$$j=nc+1,\ nc+2,\ \cdots\cdots\cdots,\ na-1,\ na$$

$nb$個のいずれの解の絶対値も．$f_{nc}(x)=0$ が含むいずれの解の絶対値よりも小さいときは．$f_{nb}{}^{(k)}(x)$ の係数 $b_i^{(k)}$ を用いて $c_j^{(k)}$ を求めれば $f_{nc}{}^{(k)}(x)=0$ に含まれる解はすべて条件式(4)［$f_{na}(x)=0$］を満足する。

② 条件式(4)［$f_{na}(x)=0$］を満足する $nb$ 個と $nc$ 個の解をそれぞれ含む $f_{nb}(x)=0$，$f_{nc}(x)=0$ の係数 $b_i$，$c_i$ をそれぞれ求める場合

$f_{nb}{}^{(k)}(x)$ の係数 $b_i^{(k)}$ の計算桁数を順次増加させて．条件式(6)を満足するように反復計算を行うと．$f_{nb}{}^{(k)}(x)=0$ と $f_{nc}{}^{(k)}(x)=0$ に含まれる解は．すべて条件式(4)［$f_{na}(x)=0$］を満足する。ただし．次の条件を満足させる。　$nc+1 \geqq nb$

$$|\delta_j^{(k)}| > |\delta_j^{(k+1)}| > |\delta_j^{(k+2)}| > \cdots\cdots$$

$$j = nc+1,\ nc+2,\ \cdots\cdots,\ na-1,\ na$$

例題の説明

（　）内の数値は $f_{nc}(x)=\sum_{i=0}^{nc} c_i x^{nc-i}$ の係数 $c_i$ の値

［　］内の数値は $f_{ncT}(x)=\sum_{i=0}^{nc} c_{iT} x^{nc-i}$ の係数 $c_{iT}$ の値

「$x_i$：計算解」は $f_{na}(x)=\sum_{i=0}^{na} a_i x^{na-i}=0$ の解の値

例題Ⅰ，Ⅱ，Ⅲでは $a_i$ は4桁，例題Ⅳでは $a_i$ は8桁与えられ．与えられる桁の次の桁から下位の桁には任意の数値を加えた。$c_0=1.0$ であるから $c_0 b_i = b_i$ である。

## 例題 I

$$\sum_{i=0}^{4} a_i x^{4-i} = 0 \qquad \left[\sum_{i=0}^{4} a_{iT} x^{4-i} = 0 \qquad a_{iT}: \text{真の係数}\right]$$

$$a_0 = 1.0000, 0000, 0000, 0000, 000E + 00$$
$$[a_{0T} = 1.0000, 000 \cdots E + 00]$$
$$a_1 = -3.1692, 5252, 8282, 5252, 828E + 03$$
$$[a_{1T} = -3.1689, 500 \cdots E + 03]$$
$$a_2 = 8.5954, 9892, 7084, 9892, 708E + 04$$
$$[a_{2T} = 8.5950, 671 \cdots E + 04]$$
$$a_3 = -1.4911, 2345, 6789, 0123, 456E + 04$$
$$[a_{3T} = -1.4912, 799 \cdots E + 04]$$
$$a_4 = 2.0920, 0000, 0000, 0000, 000E + 01$$
$$[a_{4T} = 2.0917, 991 \cdots E + 01]$$

$x_i$ : 計算解　　　　$x_{iT}$ : 真の解

$$x_1 = 3.1418, 9636, 0710, 2233, 109E + 03$$
$$[x_{1T} = 3.1415, 926 \cdots E + 03 = \pi \times 10^3]$$
$$x_2 = 2.7181, 5755, 0369, 1257, 776E + 01$$
$$[x_{2T} = 2.7182, 818 \cdots E + 01 = e \times 10^1]$$
$$x_3 = 1.7317, 7566, 6092, 3653, 162E - 01$$
$$[x_{3T} = 1.7320, 508 \cdots E - 01 = \sqrt{3} \times 10^{-1}]$$
$$x_4 = 1.4145, 0200, 1477, 6291, 626E - 03$$
$$[x_{4T} = 1.4142, 135 \cdots E - 03 = \sqrt{2} \times 10^{-3}]$$

**10進12桁計算** $\sum_{i=0}^{3} b_i x^{3-i} = 0$ 解は $x_1, x_2, x_3$

$\sum_{i=0}^{1} c_i x^{1-i} = 0$ 解は $x_4$

$$a_1 = -3.1692,5252,828E+03$$
$$c_0 b_1 = b_1 = -3.1692,5111,378E+03$$
$$c_1 = a_1 - c_0 b_1 = -1.41,450\underline{0,0000,0}E-03$$
$$(-1.41,4502,0014,8E-03)$$
$$[-1.41,4213,5\cdots E-03]$$

$$a_2 = 8.5954,9892,708E+04$$
$$c_0 b_2 = b_2 = 8.5950,5063,588E+04$$
$$a_2 - c_0 b_2 = 4.4829,120\underline{0,000}E+00$$
$$c_1 b_1 = 4.4829,0\underline{570,044}E+00$$
$$(a_2 - c_0 b_2) - c_1 b_1 = \underline{6.29,9560,0000,0}E-06$$

$$a_3 = -1.4911,2345,679E+04$$
$$c_0 b_3 = b_3 = -1.4789,6574,046E+04$$
$$a_3 - c_0 b_3 = -1.21,5771,633\underline{0,0}E+02$$
$$c_1 b_2 = -1.21,5769\underline{,9124,5}E+02$$
$$(a_3 - c_0 b_3) - c_1 b_2 = -\underline{1.7205,5000,000}E-04$$

$$a_4 = 2.0920,0000,000E+01$$
$$c_1 b_3 = 2.0919,9\underline{703,988}E+01$$
$$a_4 - c_1 b_3 = \underline{2.96,0120,0000,0}E-05$$

$$\Delta a_4 = 5.0E-03$$

## 例題 II

$$\sum_{i=0}^{4} a_i x^{4-i} = 0 \qquad \left[\sum_{i=0}^{4} a_{iT} x^{4-i} = 0 \qquad a_{iT}: \text{真の係数}\right]$$

$$a_0 = 1.0000,0000,0000,0000,000E+00$$
$$[a_{0T} = 1.0000,000\cdots E+00]$$
$$a_1 = -3.1692,5252,8282,5252,828E+03$$
$$[a_{1T} = -3.1687,754\cdots E+03]$$
$$a_2 = 8.5404,9892,7084,9892,708E+04$$
$$[a_{2T} = 8.5397,341\cdots E+04]$$
$$a_3 = 9.5061,2345,6789,0123,456E-01$$
$$[a_{3T} = 9.5063,264\cdots E-01]$$
$$a_4 = -2.5620,0000,0000,0000,000E+01$$
$$[a_{4T} = -2.5619,202\cdots E+01]$$

$x_i$ : 計算解　　　　$x_{iT}$ : 真の解

$$x_1 = 3.1420,7141,8050,5412,853E+03$$
$$[x_{1T} = 3.1415,926\cdots E+03]$$
$$x_2 = 2.7181,1102,3072,1001,335E+01$$
$$[x_{2T} = 2.7182,818\cdots E+01]$$
$$x_3 = 1.7320,0027,4673,1383,899E-02$$
$$[x_{3T} = 1.7320,508\cdots E-02]$$
$$x_4 = -1.7320,0014,8373,5181,924E-02$$
$$[x_{4T} = -1.7320,508\cdots E-02]$$

**10 進 13 ケタ計算** $\sum_{i=0}^{2} b_i x^{2-i} = 0$ 解は $x_1, x_4$

$\sum_{i=0}^{2} c_i x^{2-i} = 0$ 解は $x_2, x_3$

$$a_1 = -3.1692,5252,8283E+03$$

$$c_0 b_1 = b_1 = -3.1420,5409,8049E+03$$

$$c_1 = a_1 - c_0 b_1 = -2.71,9843,0234,\underline{00}E+01$$

$$(-2.71,9843,0233,47E+01)$$

$$[-2.72,0013,8\cdots E+01]$$

$$a_2 = \ \ 8.5404,9892,7085E+04$$

$$c_0 b_2 = b_2 = -5.4,4206,8162,264E+01$$

$$a_2 - c_0 b_2 = \ \ 8.5459,4099,5247E+04$$

$$c_1 b_1 = \ \ 8.5458,9391,77\underline{24}E+04$$

$$c_2 = (a_2 - c_0 b_2) - c_1 b_1 = \ \ 4.707,75\underline{23,0000,0}E-01$$

$$(\ 4.707,7690,3855,3E-01)$$

$$[\ 4.708,2022\cdots E-01]$$

$$a_3 = \ \ 9.5061,2345,6789E-01$$

$$c_1 b_2 = \ \ 1.4801,5711,24\underline{00}E+03$$

$$a_3 - c_1 b_2 = -1.4792,0650,00\underline{54}E+03$$

$$c_2 b_1 = -1.4792,0\underline{124,0681}E+03$$

$$(a_3 - c_1 b_2) - c_2 b_1 = -\underline{5.25,9373,0000,00}E-03$$

$$a_4 = -2.5620,0000,0000E+01$$

$$c_2 b_2 = -2.5619,9\underline{089,0766}E+01$$

$$a_4 - c_2 b_2 = -\underline{9.10,9234,0000,00}E-05$$

$$\Delta a_4 = 5.0E-03$$

## 例題 III

$$\sum_{i=0}^{4} a_i x^{4-i} = 0 \quad \left[\sum_{i=0}^{4} a_{iT} x^{4-i} = 0 \quad a_{iT}: \text{真の係数}\right]$$

$$a_0 = 1.0000,0000,0000,0000,000E+00$$
$$[a_{0T} = 1.0000,000\cdots E+00]$$
$$a_1 = -1.7462,5252,8282,5252,828E-01$$
$$[a_{1T} = -1.7461,929\cdots E-01]$$
$$a_2 = -9.8704,9892,7084,9892,708E+04$$
$$[a_{2T} = -9.8696,043\cdots E+04]$$
$$a_3 = 1.7231,2345,6789,0123,456E+04$$
$$[a_{3T} = 1.7234,233\cdots E+04]$$
$$a_4 = -2.4180,0000,0000,0000,000E+01$$
$$[a_{4T} = -2.4175,494\cdots E+01]$$

$x_i$ : 計算解　　　　$x_{iT}$ : 真の解

$$x_1 = -3.1417,3476,1804,5979,651E+02$$
$$[x_{1T} = -3.1415,926\cdots E+02]$$
$$x_2 = 3.1417,3528,3478,6615,239E+02$$
$$[x_{2T} = 3.1415,926\cdots E+02]$$
$$x_3 = 1.7315,8354,8494,4841,607E-01$$
$$[x_{3T} = 1.7320,508\cdots E-01]$$
$$x_4 = 1.4147,3057,2448,2336,540E-03$$
$$[x_{4T} = 1.4142,135\cdots E-03]$$

10進14ケタ計算 $\sum_{i=0}^{2} b_i x^{2-i} = 0$ 解は $x_1, x_2$

$\sum_{i=0}^{2} c_i x^{2-i} = 0$ 解は $x_3, x_4$

$$a_1 = -1.7462,5252,8282,5E-01$$
$$c_0b_1 = -5.2167,4063,5588,0E-05$$
$$c_1 = a_1 - c_0b_1 = -1.7457,3085,4218,9E-01$$
$$(-1.7457,3085,4218,9E-01)$$
$$[-1.7461,929\cdots E-01]$$

$$a_2 = -9.8704,9892,7085,0E+04$$
$$c_0b_2 = b_2 = -9.8704,9895,2492,9E+04$$
$$a_2 - c_0b_2 = 2.5407,\underline{9000,0000,0}E-04$$
$$c_1b_1 = 9.10,7025,0860,035E-06$$
$$c_2 = (a_2 - c_0b_2) - c_1b_1 = 2.4497,\underline{1974,9140,0}E-04)$$
$$(2.4497,2418,4803,5E-04)$$
$$[2.4494,897\cdots E-04]$$

$$a_3 = 1.7231,2345,6789,0E+04$$
$$c_1b_2 = 1.7231,2345,6790,2E+04$$
$$a_3 - c_1b_2 = -1.2\underline{000,0000,0000,0}E-08$$
$$c_2b_1 = -1.2\underline{779,5525,6114,1}E-08$$
$$(a_3 - c_1b_2) - c_2b_1 = \underline{7.79,5525,6114,100}E-10$$

$$a_4 = -2.4180,0000,0000,0E+01$$
$$c_2b_2 = -2.4179,9\underline{562,1778,8}E+01$$
$$a_4 - c_2b_2 = -\underline{4.37,8221,2000,000}E-05$$

$$\Delta a_4 = 5.0E-03$$

## 例題IV

$$\sum_{i=0}^{4} a_i x^{4-i} = 0 \left[ \quad \sum_{i=0}^{4} a_{iT} x^{4-i} = 0 \quad a_{iT}: \text{真の係数} \right]$$

$$a_0 = 1.0000,0000,0000,0E+00$$
$$[a_{0T} = 1.0000,000\cdots E+00]$$
$$a_1 = -1.1322,9131,2345,6E+01$$
$$[a_{1T} = -1.1322,913\cdots E+01]$$
$$a_2 = 4.5715,1252,8282,5E+01$$
$$[a_{2T} = 4.5715,125\cdots E+01]$$
$$a_3 = -7.7878,4144,9892,7E+01$$
$$[a_{3T} = -7,7878,414\cdots E+01]$$
$$a_4 = 4.6732,4940,0000,0E+01$$
$$[a_{4T} = 4.6732,494\cdots E+01]$$

$x_i$ : 計算解　　$x_{iT}$ : 真の解

$$x_1 = 4.4721,3551,2459,7E+00$$
$$[x_{1T} = 4.4721,359\cdots E+00 = 2\cdot\sqrt{5}]$$
$$x_2 = 2.7188,4958,1639,9E+00$$
$$x_3 = 2.7177,1447,5516,1E+00$$
$$[x_{2T} = x_{3T} = 2.7182,818\cdots E+00 = e]$$
$$x_4 = 1.4142,1355,3840,3E+00$$
$$[x_{4T} = 1.4142,135\cdots E+00 = \sqrt{2}]$$

10 進 10 ケタ計算 $\quad \sum_{i=0}^{2} b_i x^{2-i} = 0 \quad$ 解は $x_1, x_2$

$\sum_{i=0}^{2} c_i x^{2-i} = 0 \quad$ 解は $x_3, x_4$

$$a_1 = -1.1322,9131,2E+01$$
$$c_0 b_1 = b_1 = -7.190,9850,94E+00$$
$$c_1 = a_1 - c_0 b_1 = -4.131,9280,2\underline{6}E+00$$
$$(-4.131,9280,29E+00)$$
$$[-4.132,4953\cdots E+00]$$

$$a_2 = 4.5715,1252,8E+01$$
$$c_0 b_2 = 1.2159,0637,7E+01$$
$$a_2 - c_0 b_2 = 3.3556,0615,1E+01$$
$$c_1 b_1 = 2.9712,6328,4E+01$$
$$c_2 = (a_2 - c_0 b_2) - c_1 b_1 = 3.843,4286,7\underline{0}E+00$$
$$(3.843,4286,47E+00)$$
$$[3.844,2310\cdots E+00]$$

$$a_3 = -7.7878,4145,0E+01$$
$$c_1 b_2 = -5.0240,3763,\underline{6}E+01$$
$$a_3 - c_1 b_2 = -2.7638,0381,\underline{4}E+01$$
$$c_2 b_1 = -2.7638,0382,\underline{8}E+01$$
$$(a_3 - c_1 b_2) - c_2 b_1 = 1.\underline{4000,0000,0}E-07$$

$$a_4 = 4.6732,4940,0E+01$$
$$c_2 b_2 = 4.6732,4942,\underline{9}E+01$$
$$a_4 - c_2 b_2 = 2.\underline{9000,0000,0}E-07$$
$$\Delta a_4 = 5.0 \times 10^{-7}$$

例題IVでは2重根を含み．2つの2次式

$$f_{nb}(x)=\sum_{i=0}^{nb} b_i x^{nb-i}=0,\quad f_{nc}(x)=\sum_{i=0}^{nc} c_i x^{nc-i}=0$$

それぞれに分かれて2重根が入っており．係数$b_i$, $c_i$はすべて精度が（8/2=4）4桁である。しかし．2つの2次式から4つの解を求めると．単根の精度は8桁，2重根の精度は4桁である。すなわち．「$b_1$の誤差と$b_2$の誤差」，「$c_1$の誤差と$c_2$の誤差」はそれぞれ単根の精度が8桁求められるように入っており．さらに解と係数の関係から．$b_i$, $c_i$に入っている誤差は独立でなく．2重根の解の精度を悪くしている独立の誤差は1つである。これらの関係が成立していないときは判別式(6)が成立しない。